DS n°5 : Limites, dérivation, convexité

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées

Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point. Il n'est pas attendu que vous arrivez au bout du sujet (le barème dépassera 100 points). Faites primer la qualité sur la quantité.

Exercice 1 : Moyennes arithmétique, quadratique, harmonique et géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad Q = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$H = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} \qquad G = (a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$$

On veut montrer que $H \leq G \leq A \leq Q$.

1) Montrer que $\ln G \leq \ln A$. En déduire une des inégalités voulues.

2) En utilisant la fonction $x \mapsto x^2$, montrer que $A \leq Q$.

3) Montrer que $\ln \frac{1}{H} \geq \ln \frac{1}{G}$. Conclure.

Exercice 2 : Calculs de limites (?)

1) On pose $f : x \mapsto (\ln x) \times \ln(\ln x)$. Déterminer D_f. Montrer que f est continue. Peut-on prolonger f par continuité en 1 ? Si c'est le cas, on précisera la valeur du prolongement en 1.

2) On considère la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$. On pose $J =]-1, 0[\cup]0, 1[$.

- **a)** Montrer que f est dérivable sur J et déterminer l'expression de sa dérivée sur J.
- **b)** Est-ce que f est dérivable en 1 ?
- **c)** Est-ce que f est dérivable en 0 ? On pourra étudier la dérivabilité à gauche et à droite en 0.

Exercice 3 : Le principe du maximum

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexe. On souhaite montrer le résultat suivant, appelé *principe du maximum* :

$(\mathcal{PM})$: si f atteint son maximum en un point de $]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

1) Dans cette question uniquement, on suppose f dérivable. Montrer $(\mathcal{PM})$. On pourra montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) = f(c)$.

2) On souhaite maintenant prouver le principe du maximum dans le cas général.

- **a)** Rappeler l'inégalité des pentes qui fait intervenir les points $x, c, z \in [a, b]$ tels que $x < c < z$.
- **b)** En déduire $(\mathcal{PM})$.

3) On suppose que f est continue. Montrer que

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max(\, f(a),\, f(b)\,)$$

après avoir justifié si nécessaire que les quantités ci-dessus ont un sens.

Problème : Rolle généralisé

1) On considère $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

- **a)** Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et calculer f' et f''.
- **b)** Déterminer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. On veut montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]a, +\infty[$.
On pose $h = f \circ \tan$, définie sur $\left[\arctan a, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

- **a)** Montrer que h est prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$. On appelera encore h ce prolongement. Donner la valeur de $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- **b)** Montrer qu'il existe $c \in \left]\arctan a, \dfrac{\pi}{2}\right[$ telle que $h'(c) = 0$.
- **c)** En déduire qu'il existe $\alpha \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

3) Soit b un réel et $g : [b, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[b, +\infty[$ telle que $g(b) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. On veut montrer que g' et g'' s'annulent au moins une fois sur $]b, +\infty[$.

- **a)** Justifier qu'il existe $\beta \in]b, +\infty[$ tel que $g'(\beta) = 0$.
- **b)** Soit $x \geq b$. Montrer qu'il existe $d_x \in]x, x+1[$ tel que $g'(d_x) = g(x+1) - g(x)$.
- **c)** On suppose que g' est monotone au voisinage de $+\infty$.
  - **i)** Justifier que g' admet une limite en $+\infty$.
  - **ii)** Montrer que cette limite est nulle.
  - **iii)** En déduire qu'il existe $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.
- **d)** On suppose que g' n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$.
  - **i)** Justifier qu'il existe $x_1, x_2 \in]\beta, +\infty[$ tels que $g''(x_1) < 0 < g''(x_2)$.
  - **ii)** En déduire qu'il existe $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.
- **e)** Conclure.

Note : ce résultat peut se généraliser avec l'énoncé suivant. Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Alors on peut montrer que $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ s'annulent au moins une fois sur $]a, +\infty[$. On l'a vérifié dans un cas particulier avec la question **1)**.

4) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f(a) = f(b)$, est-ce que nécessairement les fonctions $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ s'annulent au moins une fois sur $]a, b[$?

Quel chapitre est le moins apprécié par les élèves en MPSI ? Celui sur la dérivation, parce que le TAF, c'est pas d'Rolle !